Varijacioni postupak

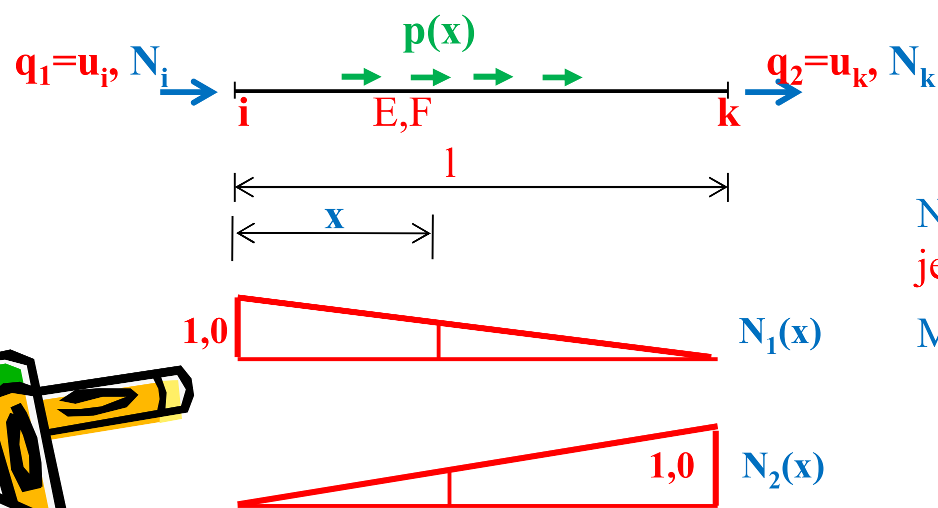
Za prave prizmatične štapove najpogodnije je izvođenje **matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja direktnim postupkom**, na osnovu jasnog geometrijsko-statičkog značenja.

Varijacioni postupak se zasniva na **stavu o stacionarnosti odgovarajućeg funkcionala**.

Za **metodu deformacije** radi se o **funkcionalu potencijalne energije**.

Aksijalno naprezanje

Aksijalno napregnut štap **ima dva stepena slobode**, s toga se pomjeranje u pravcu ose štapa **u(x) može aproksimirati samo pomoću linearnih funkcija**:



$$u(x) = \sum_{m=1}^{2} N_m(x) u_m = N\,q$$

Na slici su prikazane **linearne funkcije** sa jediničnim vrijednostima u čvorovima.

Matrica interpolacionih funkcija je:

$$N = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{x}{l} & \dfrac{x}{l} \end{bmatrix}$$

Vektor pomjeranja q u transponovanom obliku definisan je sa:

$$q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & u_k \end{bmatrix}$$

Linearna aproksimacija pomjeranja odgovara **tačnom rješenju homogene diferencijalne jednačine aksijalno napregnutog štapa**:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{p(x)}{EF} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad N = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix}$$

Potencijalna energija štapa može da se napiše u sljedećem obliku: $\Pi = A - R_s$

Polazeći od izraza za **deformacioni rad** štapa:

$$A = \frac{1}{2}\int_s (N\varepsilon + M\chi + T\varphi_T)ds$$

vodeći računa da se **radi o aksijalnom naprezanju**, **EF=const**:

$$N = F\sigma \quad \sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

dobija se:

$$A = \frac{EF}{2}\int_s \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \frac{EF}{2}\int_0^l \frac{(q_2 - q_1)^2}{l^2} dx = \frac{EF}{2l}(q_1^2 - 2q_1q_2 + q_2^2)$$

Rad spoljašnjih sila koje djeluju na krajevima štapa je definisan sa:

$$R_s = N_1 u_i + N_k u_k = R_1 q_1 + R_2 q_2 = R^T q$$

Potencijalna energija štapa dobija sljedeći obliku:

$$\Pi = A - R_s = \frac{EF}{2l}(q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2) - R_1 q_1 - R_2 q_2$$

Primjenom stava o stacionarnosti potencijalne energije dobija se:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta q_1} = 0 \quad \Rightarrow \frac{EF}{l}(q_1 - q_2) - R_1 = 0 \qquad R_1 = \frac{EF}{l}(q_1 - q_2)$$

$$\frac{\delta \Pi}{\delta q_2} = 0 \quad \Rightarrow \frac{EF}{l}(-q_1 + q_2) - R_2 = 0 \qquad R_2 = \frac{EF}{l}(-q_1 + q_2)$$

Razvijeni matrični oblik prethodnih veza je:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Skraćeni matrični oblik definisan sa:

$$R = k\, q$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja dobija se iz uslova da je **rad ekvivalentnog opterećenja jednak radu stvarnog opterećenja koje djeluje na štap**:

$$Q^T q = \int_0^l p(x) u(x) dx$$

Kada se u navedenu relaciju ubaci izraz za **u(x)=N(x)q** i **skrati sa q** dobija se:

$$Q^T = \int_0^l p(x) N(x) dx$$

Za slučaj **ravnomjerno raspodijeljenog opterećenja p_o** dobija se:

$$Q^T = p_o \int_0^l \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} dx = \frac{p_o l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Za slučaj **linearno promjenljivog opterećenja** slijedi:

$$Q^T = p_o \int_0^l \frac{x}{l} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} dx = \frac{p_o l}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kada je spoljašnji **uticaj temperatura duž ose štapa t(x)** tada **iz jednakosti rada ekvivalentnog opterećenja i rada usled temperature t(x):**

$$Q^T q = \int_0^l \varepsilon_o(x)\mathcal{N}(x)dx$$

$$\varepsilon_o(x) = \alpha_t t(x)$$

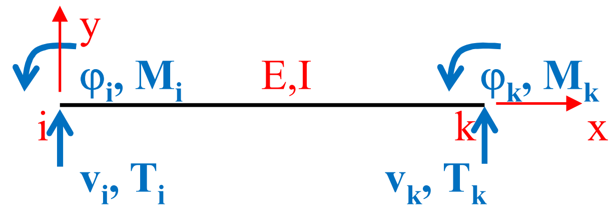
$$\mathcal{N}(x) = EF\frac{du}{dx} = EF\frac{d}{dx}(N(x)q)$$

$$Q^T = EF\int_0^l \varepsilon_o(x)\begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} dx$$

Koja **za slučaj dejstva konstantne temperature duž štapa konstantnog poprečnog presjeka** postaje:

$$Q^T = EF\alpha_t t_o \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Savijanje u ravni



Rješenje **homogene diferencijalne jednačine štapa opterećenog na savijanje**, EI=const:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=0 \qquad v(x)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\alpha_4x^3$$

matrični oblik:

$$v=A\alpha$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix} \qquad \alpha^T=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$$

Koeficijenti α_i (i=1,2,3,4), **generalisane koordinate, mogu da se odrede iz konturnih uslova:**

$$x=0 \qquad\qquad x=l$$

$$v(0)=v_i \qquad \frac{dv}{dx}=\varphi_i \qquad v(l)=v_k \qquad \frac{dv}{dx}=\varphi_k$$

$$x = 0 \quad v(0) = v_i \quad v'(0) = \varphi_i \qquad\qquad x = l \quad v(l) = v_k \quad v'(l) = \varphi_k$$

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \qquad\qquad v = A\alpha$$

$$v'(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3 x \; + 3\alpha_4 x^2$$

dobija se:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Odnosno, u matričnom obliku: $q = C\alpha$

Inverzijom prethodne relacije dobija se:

$$\alpha = C^{-1} q \qquad\qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

Kada se u **v=A** α ubaci prethodna relacija dobija se:

$$v = A\alpha = AC^{-1}q = Nq = \sum_{m=1}^{4} N_m q_m$$

Elementi **vektora N interpolacionih funkcija**:

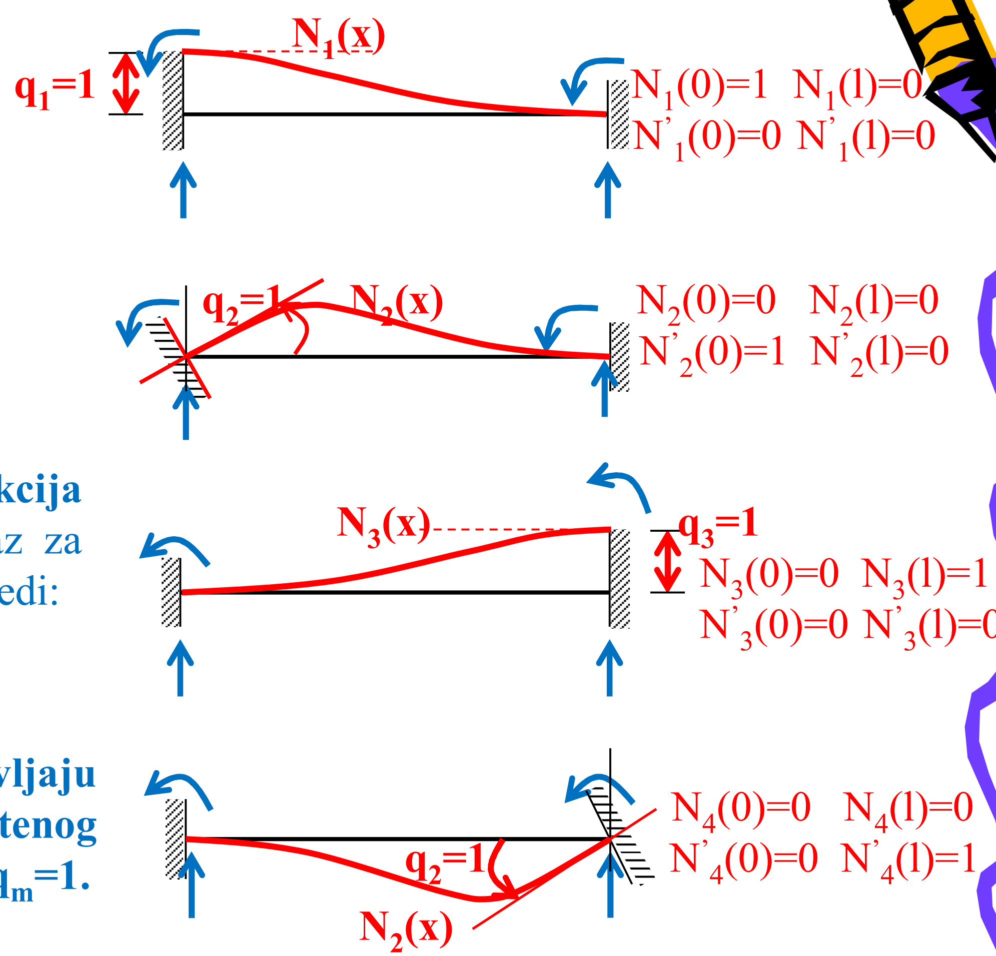
$$N = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix}$$

$$N_1(x) = 1 - 3(\frac{x}{l})^2 + 2(\frac{x}{l})^3$$

$$N_2(x) = l[\ \frac{x}{l} - 2(\frac{x}{l})^2 + (\frac{x}{l})^3\ ]$$

$$N_3(x) = 3(\frac{x}{l})^2 - 2(\frac{x}{l})^3$$

$$N_4(x) = -l[\ (\frac{x}{l})^2 - (\frac{x}{l})^3\ ]$$



Značenje interpolacionih funkcija jednostavno se dobija kada se u izraz za v(x) stavi da je $q_m=1$, $q_n=0$ za $n \neq m$ slijedi:

$$v(x) = N_m(x)$$

intrpolacione funkcije $N_m(x)$ **predstavljaju elastičnu liniju obostrano uklještenog štapa** usled generalisanog pomjeranja $q_m=1$.

Interpolacione funkcije koje su izvedene prestavljaju **Hermite-ovi polinome prvog reda**.

Potencijalna energija štapa: $\Pi = A - R_s$

Prema izrazu za **deformacioni rad** dobija se:

$$A = \frac{1}{2}\int_s (N\varepsilon + M\chi + T\gamma)ds \; = \frac{1}{2}\int_s EI\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx \; = \frac{EI}{2}\int_0^l \sum_{m=1}^{4}\left[\frac{d^2}{dx^2}(N_m(x)q_m)\right]^2 dx$$

$$A = \sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} \frac{EI}{2}\left[\int_0^l N_m''(x)N''_n(x)dx\right] q_m q_n = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} k_{mn}q_m q_n$$

$$k_{mn} = EI\int_0^l N_m''(x)N''_n(x)dx$$

Deformacioni rad u matričnom obliku glasi: $A = \frac{1}{2}q^T k\, q$

Rad generalisanih sila u čvorovima štapa je: $R_s = q^T R$

Potencijalna energija jednaka **zbiru deformacionog rada i potencijala generalisanih sila** u čvorovima:

$$\Pi = A - R_s = \frac{1}{2}q^T k\, q - R^T q$$

$$\Pi = A - R_s = \frac{1}{2} q^T k\, q - R^T q = \frac{1}{2} q^T k\, q - q^T R$$

Primjenom **stava o stacionarnosti funkcionala potencijalne energije**:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta q^T} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k\, q - R = 0$$

dobija se **veza generalisanih sila i generalisanih pomjeranja na krajevima štapa**:

$$k\, q = R$$

Da bi se odredili **elementi matrice krutosti** potrebno je odrediti **druge izvode interpolacionih funkcija:**

$$N_1''(x) = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \qquad N_2''(x) = -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \qquad N_1(x) = 1 - 3(\frac{x}{l})^2 + 2(\frac{x}{l})^3$$

$$N_3''(x) = \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \qquad N_4''(x) = -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}$$

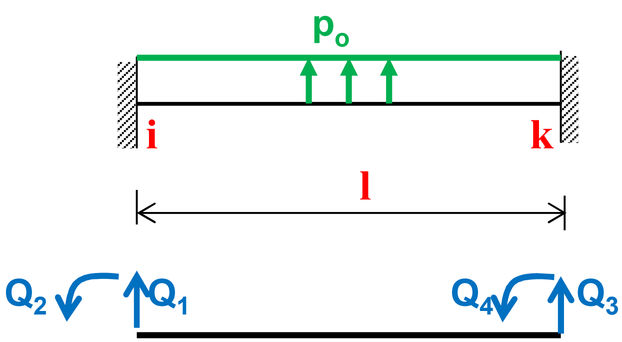
$$k_{mn} = EI \int_0^l N_m''(x) N''_n(x)\, dx$$

$$k = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja dobija se **iz uslova da je rad ekvivalentnog opterećenja jednak radu spoljašnjih sila** koje djeluju duž ose štapa.

Usled transverzalnog opterećenja p(x) dobija se:

$$Q^T q = \int_0^l p(x)v(x)dx = \int_0^l p(x)N(x)q\,dx$$



$$Q^T = \int_0^l p(x)N(x)dx$$

Kada na štap djeluje **ravnomjerno raspodijeljeno opterećenje p_o** po cijeloj dužini štapa dobija se **vektor ekvivalentnog opterećenja** u sljedećem obliku:

$$Q = p_o \int_0^l \begin{bmatrix} 1-3(\frac{x}{l})^2+2(\frac{x}{l})^3 \\ l[\ \frac{x}{l}-2(\frac{x}{l})^2+(\frac{x}{l})^3\ ] \\ 3(\frac{x}{l})^2-2(\frac{x}{l})^3 \\ -l[\ (\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3\ ] \end{bmatrix} dx = \frac{p_o l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{6} \\ 1 \\ -\frac{l}{6} \end{bmatrix}$$

Kada na štap djeluje **temperaturna razlika Δt(x)** tada iz jednakosti rada slijedi:

$$Q^T q = \int_0^l \chi_o(x)\mathrm{M}(x)dx$$

$$\chi_o(x) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\mathrm{M}(x) = -EI\frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$v = Nq = \sum_{m=1}^{4} N_m q_m$$

$$v'' = N'' q$$

gdje su:

χ_o **promjena krivine uled temperaturne razlike**
M(x) **momenat savijanja duž ose štapa**

$$Q^T q = -EI\int_0^l \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\frac{d^2 v}{dx^2}dx$$

$$Q = EI\alpha_t \frac{\Delta t}{h}\int_0^l \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3} \\ -\frac{4}{l}+\frac{6x}{l^2} \\ \frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3} \\ -\frac{2}{l}+\frac{6x}{l^2} \end{bmatrix} dx = EI\alpha_t \frac{\Delta t}{h}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

RAVNI NOSAČI

Kod ravnih nosača **ose svih štapova sa jednom od glavnih centralnih osa inercije njihovih poprečnih presjeka leže u ravni nosača**.

Opterećenje koje djeluje na nosač, takođe, **leži u ravni nosača**.

Zavisno od načina vezivanja štapova u čvorovima ravni nosači mogu biti:

Puni nosači kod kojih **postoji barem jedan čvor sa krutom vezom** (ortogonalni okviri, kontinualni i simetrični nosači)

Rešetkasti nosači kod kojih su **sve veze štapova zglavkaste**

U prethodnom **je objašnjeno formiranje matrice krutosti i** vektora ekvivalentnog čvornog opterećenja štapova **koji su kruto ili zglavkasto vezani**.

Ove relacije **za štapove osnova su za određivanje matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja sistema štapova**.

Na taj način formira se **sistem jednačina iz kojih se određuju pomjeranja i obrtanja čvorova**, zatim, **reakcije oslonaca i onda sila u pojedinim štapovima**.

Puni nosači

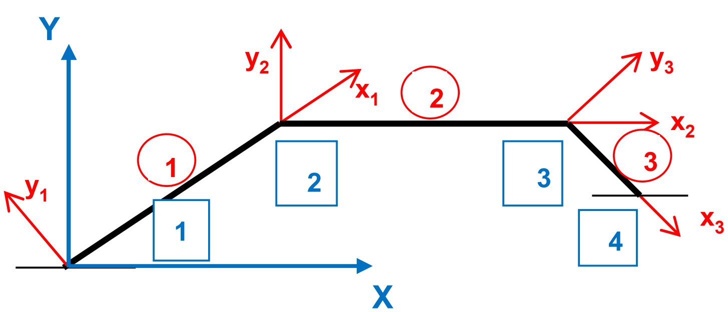
Transformacija vektora generalisanih sila i pomjeranja iz lokalnog u globalni koordinatni sistem

Do sada smo **posmatrali štap kao nezavisan element** koji **je izdvojen iz sistema** i analizu tog štapa sprovodili **u pravouglom koordinatnom sistemu x, y, z koji nazivamo *lokalni kordinatni sistem*.**

Koordinatni početak lokalnog koordinatnog sistema je u lijevom kraju štapa, osa x se poklapa sa osom štapa, a y i z ose se poklapaju sa glavnim osama inercije poprečnog presjeka.

Svaki štap ima svoj **lokalni kordinatni sistem x_i, y_i** , pri čemu je ***i* oznaka štapa**:

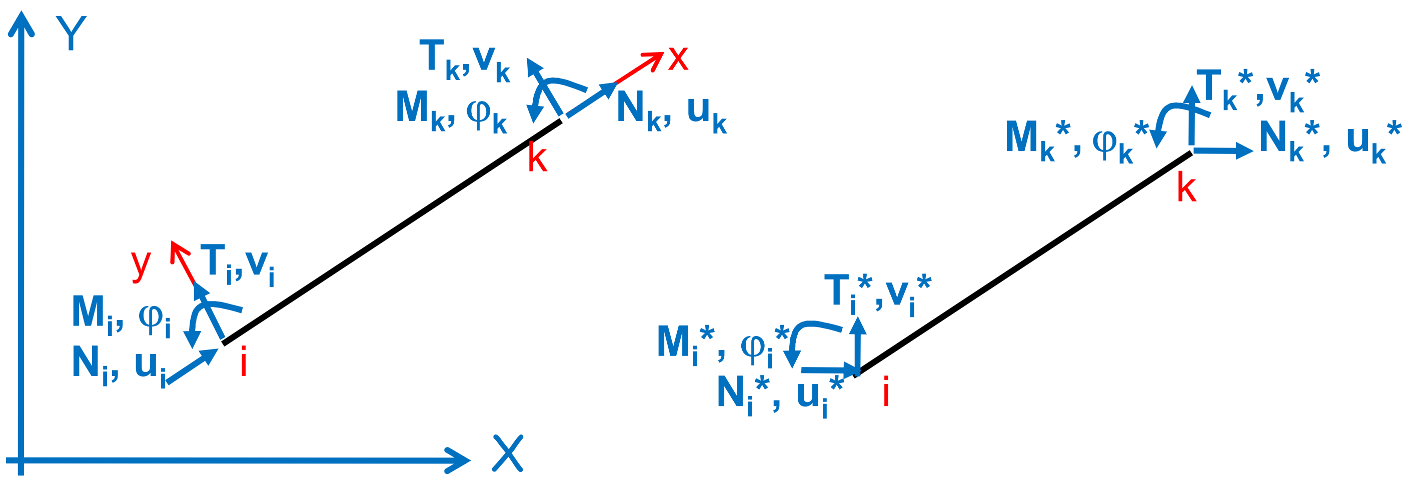
Za **analizu sistema elemenata** neophodno je da se **definiše položaj svakog štapa u odnosu na jedan zajednički sistem** koji se naziva ***referentni ili opšti ili globalni koordinatni sistem čije ose označavamo velikim slovima, X,Y sistem.***



Šematski prikaz oznaka štapova i čvorova ravnog punog nosača dat je na slici.

Zbog toga je **potrebno izvršiti transformaciju vektora generalisanih sila**, odnosno, **pomjeranja, i matrice krutosti štapa iz lokalnog u globalni koordinatni sistem**.

Na slici su prikazane **sile i pomjeranja na krajevima štapa u lokalnom (bez zvjezdice)** i **globalnom koordinatnom sistemu (sa zvjezdicom).**



Izvršićemo transformaciju sila i pomjeranja.

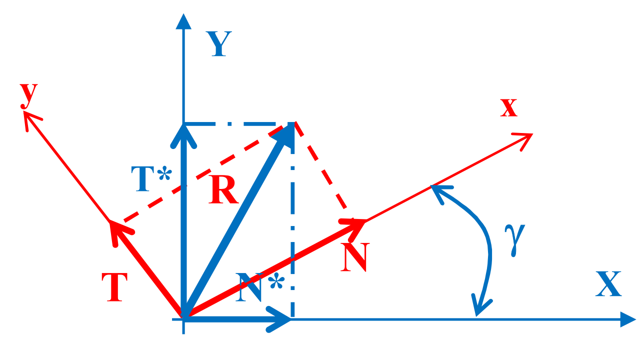
Momenti i uglovi obrtanja su invarijante u odnosu na ova dva sistema.

Na slici su prikazane komponente vektora R i momenta M u lokalnom x,0,y i globalnom X,0,Y koordinatnom sistemu.

$$N = N^* \cos\gamma + T^* \sin\gamma$$

$$T = -N^* \sin\gamma + T^* \cos\gamma$$

$$M = M^*$$



Ukoliko se usvoje sljedeće oznake:

$$\lambda = \cos\gamma$$
$$\mu = \sin\gamma$$

$$N = N^* \cos\gamma + T^* \sin\gamma$$
$$T = -N^* \sin\gamma + T^* \cos\gamma$$
$$M = M^*$$

Matrični oblik relacija je:

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^* \\ T^* \\ M^* \end{bmatrix}$$

U sažetom obliku za **kraj i** važi da je:

$$R_i = t\ R_i^*$$

gdje su:

R_i vektor generalisanih sila čvora i u lokalnom koordinatnom sistemu

R^*_i vektor generalisanih sila čvora i u globalnom koordinatnom sistemu

t matrica transformacije kraja i iz globalnog u lokalni koordinatni sistem

Za kraj k, takođe, možemo napisati:

$$R_k = t\ R_k^*$$

Za štap i-k, s obzirom na navedeno, važi sljedeća relacija:

$$R = T\ R^*$$

gdje su:

$$R = \begin{bmatrix} R_i \\ \hdashline R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ \hdashline N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} \qquad R^* = \begin{bmatrix} R_i^* \\ \hdashline R_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^* \\ T_i^* \\ M_i^* \\ \hdashline N_k^* \\ T_k^* \\ M_k^* \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & & & & \\ -\mu & \lambda & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & \mu & \\ & & & -\mu & \lambda & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

T matrica transformacije štapa

t matrica transformacije vektora u čvoru štapa

Na sličan način, **projektovanjem vektora R na komponente u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema X i Y** dobija se:

$$\begin{bmatrix} N^* \\ T^* \\ M^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}$$

Dobijena matrica transformacije jednaka je transponovanoj matrici t, pa se na sličan način koji je naveden za štap dobija da je:

$$R^* = T^T \ R$$

T^T transponovana matrica matrice transformacije štapa T

Upoređivanjem relacija zaključije se da je:

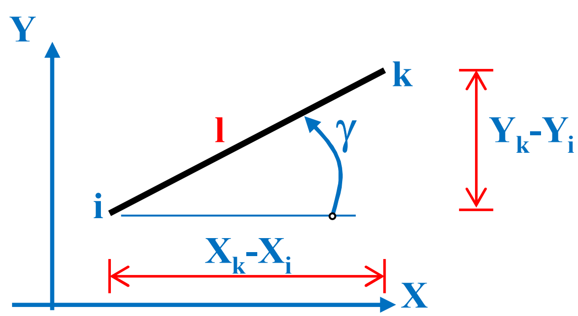
$$R = T\ R^* \qquad R^* = T^T\ R \qquad \mathbf{T^T = T^{-1}}$$

slijedi stav da je matrica T ortogonalna

Vektor generalisanih pomjeranja i vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja se transformišu **iz lokalnog u globalni koordinatni sistrem na isti način kao i vektor generalisanih sila**:

$$q = T\ q^* \qquad Q = T\ Q^* \qquad q^* = T^T q \qquad Q^* = T^T Q$$

U matrici **T** javljaju se **kosinusi i sinusi uglova**.



Ugao je pozitivan ako je orijentisan **suprotno od kazaljke na satu.**

Kosinusi i sinusi mogu da se odrede pomoću **koordinata čvorova**:

$$\lambda = \frac{x_k - x_i}{l} \qquad \mu = \frac{y_k - y_i}{l}$$

Dužina štapa je:

$$l = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$$

Transformacija matrice krutosti

Veza između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja definisana je sa:

$$R = k\, q$$

$$R = T\; R^*$$
$$q = T\; q^*$$

$$T\; R^* = k\; T\; q^*$$

Nakon množenja prethodnog izraza, **sa lijeve strane, članom T^T** dobija se:

$$T^T T\; R^* = T^T k\; T\; q^*$$

S obzirom da je $T^T T = T^{-1}\, T = I$

dobija se: $$R^* = k^*\, q^*$$

pri čemu je: $$k^* = T^T k\; T$$

k*   matrica krutosti štapa definisana u globalnom koordinatnom sistemu

Matrica transformacije za štap tipa „g“

Za štap koji je na lijevom kraju kruto a na desnom kraju zglavkasto vezan **matrica transformacije** redukuje se na taj način što se **brišu poslednja vrsta i poslednja kolona** iz već **izvedene matrice transformacije T** štapa koji je obostrano **kruto uklješten**:

$$T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \mu & & & & \\ -\mu & \lambda & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \lambda & \mu & \\ & & & -\mu & \lambda & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \qquad T_g = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda & \mu & & & \\ -\mu & \lambda & & & \\ & & 1 & & \\ \hline & & & \lambda & \mu \\ & & & -\mu & \lambda \end{array}\right]$$

Mogu se napisati i sljedeće veze, **transformacija vektora generalisanih sila i matrice krutosti, za štap tipa „g“:**

$$R_g{}^* = T_g^T \; R_g \qquad Q_g{}^* = T_g^T \; Q_g$$

$$R_g = T_g \; R_g{}^* \qquad Q_g = T_g \; Q_g{}^*$$

$$R_g{}^* = k_g{}^* \, q_g{}^* \qquad k_g{}^* = T_g^T k_g T_g$$